

Toma de decisiones en los Modelos de Optimización

Caso Financiero



La importancia de los algoritmos



Modelo aplicativo de optimización a una empresa productora.

Resumen

Mediante un caso hipotético de una empresa que produce dos variedades de productos, con cierta capacidad de producción y mediante la utilización de unos recursos limitados de tiempo y capital, lograr optimizar estos de tal manera que logre la máxima ganancia. Para ello se formulará el modelo matemático a optimizar y mediante la utilización del algoritmo del solver de Excel, obtener la solución óptima, de la producción y de la ganancia durante un periodo de tiempo determinado.

Introducción

La investigación de operaciones es una aplicación del método científico a los problemas de toma de decisiones en las empresas, organizaciones tanto del orden privado como gubernamental.

Para una mejor comprensión podemos decir que el método científico es un proceso continuo de observaciones, desarrollo de reglas para describir la observación pasada, como la futura.

Las reglas para predecir el comportamiento futuro se representan en un modelo.

El concepto de modelo juega un papel importante en la investigación de operaciones tal como ocurre en otras ciencias.

Un modelo es una representación de la realidad de un problema o situación analizar y sirve como herramienta para predecir los acontecimientos futuros.

Material y Métodos

Caso Aplicativo de finanzas

Considérese una compañía que debe elaborar dos productos en un determinado periodo (un trimestre). La compañía puede pagar por materiales y mano de obra con dinero obtenido de dos fuentes: fondos de la compañía (propios) y préstamos. La compañía enfrenta tres decisiones:

¿Cuántas unidades debe producir del producto 1?

¿Cuántas unidades debe producir del producto 2?

Cuánto dinero debe obtener prestado para apoyar la producción de los dos productos.

Al tomar estas decisiones la compañía debe buscar maximizar la ganancia sujeta a las condiciones indicadas a continuación.

1. Los productos de una compañía disfrutan de un “mercado de ventas”, por lo tanto, la empresa puede vender tantas unidades como pueda producir. Mas aun, la cantidad producida no tiene efecto en los precios del mercado ya que el volumen de producción de la compañía es pequeño con relación al volumen del mercado total. Por lo tanto, a la empresa le gustaría producir tantas unidades como fuera posible dentro de las restricciones financieras y de capacidad de su fábrica. Estas restricciones junto con los datos de costos y precios, se dan en la tabla que posteriormente se describirá.
2. Los fondos propios de la compañía disponible durante el periodo son de \$ 30.000.
3. Un banco prestará hasta \$ 20.000 por trimestre a una tasa de interés del 5% por trimestre, si la razón financiera conocida como la prueba de ácido de la compañía permanece en una proporción 3 a 1, como mínimo mientras exista el adeudo. Recuerde que la prueba de ácido está dada por la razón de efectivo más cuentas por cobrar dividido en las cuentas por pagar.
4. Como se observará los pagos de mano de obra y materia prima se hacen al final del periodo de producción; por lo tanto, el crédito necesario se obtiene en ese momento. Los envíos de los productos fabricados se hacen a crédito, al final del periodo de producción. Finalmente, el ingreso por ventas se recibe y las cuentas por pagar se cancelan al final del siguiente periodo.

Tabla de precios y costos

| Producto | Precio De Venta(\$/U) | Costos De Producción(\$/U) | Horas Para Producir Una Unidad En El Dpto. | | |
|---------------------------------|-----------------------|----------------------------|--|----|----|
| | | | A | B | C |
| 1 | 14 | 10 | .5 | .3 | .2 |
| 2 | 11 | 8 | .3 | .4 | .1 |
| Horas Disponibles Por Trimestre | | | 50 | 40 | 20 |
| | | | 0 | 0 | 0 |

Formulación del Problema

1. Definición de las variables de decisión.

X_1 = Cantidad de unidades a producir del producto 1 por trimestre (u/T)

X_2 = Cantidad de unidades a producir del producto 2 por trimestre (u/T)

X_3 = Cantidad de dinero a obtener mediante préstamo (\$)

2. Definimos la función objetivo (F.O)

Max Ganancia total = $(14-10)\$/uX_1(u/T) + (11-8)\$/uX_2(u/T) - 0.05X_3(\$/T)$

3. Definimos las restricciones.

Restricción de capacidad de producción

Departamento A $0.5(h/u)X_1(u) + 0.3(h/u)X_2(u) \leq 500$ h

Departamento B $0.3(h/u)X_1(u) + 0.4(h/u)X_2(u) \leq 400$ h

Departamento C $0.2(h/u)X_1(u) + 0.1(h/u)X_2(u) \leq 200$ h

Restricción de los fondos disponibles para la producción \$30.000 de la empresa más los del préstamo.

La producción está limitada a la disponibilidad de los recursos de capital.

$10(\$/u)X_1(u) + 8(\$/u)X_2(u) \leq \$30.000 + X_3(\$)$

La disponibilidad de los fondos disponibles de la empresa

$X_3(\$) \leq \20.000

Restricción de la prueba de acido

$$\frac{\text{Efectivo} + \text{cuentas por cobrar}}{\text{Cuentas por pagar}} = 3$$

$\$30.000 + X_3 + 4(\$/u)X_1(u) + 3(\$/u)X_2(u) = (3 + .15)X_3(\$)$

$$\$30.000 + X_3 + 4(\$/u)X_1(u) + 3(\$/u)X_2(u) = (3.15)X_3(\$)$$

4. Definimos la condición de no negatividad

$$X_j \geq 0 \text{ Para } J = 1,2,3$$

5. Modelo matemático

$$\text{Max Ganancia total} = 4X_1 + 3X_2 - 0.05X_3$$

C.S.R.

$$0.5X_1 + 0.3X_2 \leq 500$$

$$0.3X_1 + 0.4X_2 \leq 400$$

$$0.2X_1 + 0.1X_2 \leq 200$$

$$10X_1 + 8X_2 \leq 30.000 + X_3 \text{ trasponiendo términos } 10X_1 + 8X_2 - X_3 \leq 30.000$$

$$X_3 \leq 20.000$$

$$30.000 + X_3 + 4X_1 + 3X_2 = 3.15X_3$$

$$X_3 + 4X_1 + 3X_2 - 3.15X_3 = -30.000$$

$$4X_1 + 3X_2 - 23.15X_3 = -30.000$$

Multiplicando por menos uno (-1) tenemos.

$$-4X_1 - 3X_2 + 23.15X_3 = 30.000$$

Modelo Final

$$\text{Max Ganancia total} = 4X_1 + 3X_2 - 0.05X_3$$

C.S.R.

$$0.5X_1 + 0.3X_2 \leq 500$$

$$0.3X_1 + 0.4X_2 \leq 400$$

$$0.2X_1 + 0.1X_2 \leq 200$$

$$10X_1 + 8X_2 - X_3 \leq 30.000 \\ X_3 \leq 20.000$$

$$-4X_1 - 3X_2 + 23.15X_3 = 30.000$$

$$X_j \geq 0 \text{ Para } J = 1,2,3$$

Modelo de Algoritmo

La construcción del modelo aplicar de acuerdo al algoritmo del Solver de Excel es como se detalla a continuación.

| Ganancia | \$ 0,00 | | | |
|---------------|---------|-----|-------|-----------|
| C.C | 4 | 3 | -0,05 | |
| Variables | X1 | X2 | X3 | |
| V. Cambiantes | 0 | 0 | 0 | |
| | 0,5 | 0,3 | 0 | ≤ 500 |
| | 0,3 | 0,4 | 0 | ≤ 400 |
| | 0,2 | 0,1 | 0 | ≤ 200 |
| | 10 | 8 | -1 | 0 ≤ 30000 |
| | | | 1 | 0 ≤ 20000 |
| | -4 | -3 | 2,15 | 0 = 30000 |

El modelo consta de una función objetivo, la cual se llama ganancia y su vector de solución, el cual registra el valor resultante una vez corrido el modelo de la ganancia obtenida.

Una fila de los coeficientes de contribución C-C; llamados así porque son los valores que corresponden a los precios de venta o costos de las variables según objetivo a optimizar.

Una fila de las variables que posee el modelo a ser estimadas.

La fila de la celda cambiante del modelo son los resultados óptimos, obtenidos una vez se corra este.

Una matriz de los coeficientes técnicos llamada así porque corresponde a los coeficientes de las variables en las restricciones y son valores estandarizados.

Un vector columna en el cual se registra la operación sumaproducto de los de la fila cambiante por cada fila de los coeficientes técnicos. Que al correr el modelo registra la cantidad de recursos consumidos según disponibilidad de estos y requeridos para lograr la ganancia optima.

La columna de los signos de las desigualdades en las restricciones, que de acuerdo a las limitaciones de los recursos pueden tomar la forma de \leq ; \geq ; $=$; que el algoritmo confronta para encontrar la solución óptima.

La columna de los recursos disponibles es la contiene las cantidades de recursos que posee la empresa para afrontar los requerimientos de la producción y que al correr el modelo se determina y son suficientes o escasos.

Este modelo se construye en una hoja de Excel. Lo importante es que el modelo matemático haya quedado bien.

Resultados

Una vez obtenido el algoritmo del modelo se corre el Solver de Excel. Este hay que definirlo en el software tal cual, obteniéndose el siguiente resultado.

| Ganancia | | \$ 3.475,69 | | |
|---------------|-----|-------------|-------|--------------------|
| Variables | | 4 | 3 | -0,05 |
| | X1 | X2 | X3 | |
| V. Cambiantes | 727 | 455 | 15941 | |
| | 0,5 | 0,3 | | 500 \leq 500 |
| | 0,3 | 0,4 | | 400 \leq 400 |
| | 0,2 | 0,1 | | 191 \leq 200 |
| | 10 | 8 | -1 | -5032 \leq 30000 |
| | | | 1 | 15941 \leq 20000 |
| | -4 | -3 | 2,15 | 30000 = 30000 |

Los valores óptimos obtenidos son.

Producir

$X_1^* = 727$ unidades del producto 1

$X_2^* = 455$ unidades del producto 2

Prestar la siguiente cada de dinero

$X_3^* = \$15.941$ a una tasa de interés del 5%

$G^* = \$3.475.69$ ganancia de la operación durante el periodo del trimestre.

Consumo de recursos en la operación.

Tiempo

Departamento A disponibles 500 horas y se consumieron 500 horas, saldo 0.

Departamento B disponible 400 horas y se consumieron 400 horas saldo 0.

Departamento C Disponible 200 horas y se consumieron 191 horas, saldo 9 horas.

Los costos de producción son de \$10.909.10 y efectivo por prestamos es de \$15.941 quedando un saldo de efectivo \$5032 y saldo disponible de \$35.032.

El préstamo que la empresa realizará será de \$15.941; disponible del banco \$20.000 saldo no usado \$4.059.

El equilibrio según prueba de ácido en la relación 3:1, se consume efectivo \$30.000 y disponible de efectivo \$30.000.

Análisis

La empresa ante los interrogantes que se plantea para tomar una decisión de cuánto dinero prestar a la entidad crediticia, a

sabiendas que su aporte es de \$30.000 y lo máximo que la limitante del banco es hasta \$20.000.

¿Cuántas unidades debe producir del producto 1?

R. La cantidad de unidades que debe producir es de 727 unidades

¿Cuántas unidades debe producir del producto 2?

R. La cantidad de unidades a producir es de 455 del producto 2.

Cuánto dinero debe obtener prestado para apoyar la producción de los dos productos.

R. La cantidad de dinero que debe prestar es de \$15491.

Al tomar estas decisiones la compañía debe buscar maximizar la ganancia sujeta a las condiciones indicadas a continuación.

En estas condiciones la máxima utilidad de la empresa es de \$3.475,69.

En la siguiente tabla se detalla todos los valores de los costos y ganancia tanto de la producción como de la obtenida una vez deducido su compromiso del crédito.

| Resumen Resultados | Valores |
|---------------------|--------------------|
| Interés | -\$ 797,04 |
| Ganancia P1 | \$ 2.909,09 |
| Ganancia P2 | \$ 1.363,64 |
| Ganancia Producción | \$ 4.272,73 |
| Ganancia Total | \$ 3.475,69 |

Con el actual plan de producción estimado de los productos I y 2 la empresa tendrá un costo de producción del producto I de \$2.909.09 y del producto 2 de \$1.363.64; las ganancias obtenida de la venta de los dos productos es de \$4.272.73 y la ganancia neta pagados los intereses del crédito es de \$3.475.69.

Sensibilización

Se analizará la función objetivo (F.O) que se optimizo y las implicaciones de las variables según ante cambios de estas.

Como se detalla en la siguiente tabla.

| Variable Nombre | Inferior | Objetivo | Superior | Objetivo | |
|--------------------|----------|----------|-----------|----------|-----------|
| | Valor | Límite | Resultado | Límite | Resultado |
| Unidades | | | | | |
| Producto I | 727 | 727 | 3476 | 727 | 3476 |
| Unidades | | | | | |
| Producto 2 | 455 | 455 | 3476 | 455 | 3476 |
| | 159 | | | | |
| Préstamo | 41 | 15941 | 3476 | 15941 | 3476 |

Donde se observa los valores obtenidos como solución optima son invariables es decir que no permiten ser reducidas o aumentadas porque se modificaría el valor óptimo de la ganancia durante el tiempo analizado (trimestre).

Sensibilización de los Coeficientes de la F.O. Manteniendo los valores de la solución en sus variables.

La siguiente tabla se tiene el comportamiento de las variables ante aumento o diminución sin alterar los valores óptimos.

| Nombre | Sensibilidad Variables de Decisión | | | | |
|------------|------------------------------------|----------|-------------|------------|------------|
| | Final | Reducido | Objetivo | Permisible | Permisible |
| | Valor | Coste | Coeficiente | Aumentar | Reducir |
| Unidades | | | | | |
| Producto I | 727 | 0 | 4 | 0,977 | 1,709 |
| Unidades | | | | | |
| Producto 2 | 455 | 0 | 3 | 2,279 | 0,586 |
| | 159 | | | | |
| Préstamo | 41 | 0 | -0,05 | 1E+30 | 2,1 |

La ganancia del producto 1 es de \$4 ante eventos externos a la empresa puede aumentar la ganancia en \$0.977 y puede disminuir la ganancia \$1.709 sin alterar el valor de la solución óptima. Para el producto 2 su ganancia de \$3 la empresa puede aumentar la ganancia a \$2279 o disminuirla en \$0.586 sin alterar la solución óptima.

En el caso del préstamo la empresa puede aumentar su valor en forma ilimitada o disminuirla hasta \$2.1 sin alterar la solución.

La importancia de los movimientos de estos coeficientes esta relacionada a que la empresa

puede tomar decisiones respecto al mercado de los según la variación ante fenómenos económicos que se puedan suceder en igual forma sobre los créditos.

Respecto de las restricciones y su variación de acuerdo a la disponibilidad de recursos se tiene.

| Nombre | Sensibilidad Restricciones | | | | |
|--------------------|----------------------------|------------------|--------------------------------|------------------------|-----------------------|
| | Final | Sombra Precio | Restricción Lado derecho | Permisible Aumentar | Permisible Reducir |
| | Valor | | | | |
| Fondos Disponibles | 5031,71 | 0 | 30000 | 1E+30 | 35031,71 |
| Fondos del Crédito | 15940,80 | 0 | 20000 | 1E+30 | 4059,20 |
| Fondos Propios | 30000 | 0,023 | 30000 | 8727,27 | 34272,73 |
| Departamento A | 500 | 6,216 | 500 | 20 | 200 |
| Departamento B | 400 | 2,664 | 400 | 266,67 | 100 |
| Departamento C | 190,91 | 0 | 200 | 1E+30 | 9,09 |

Se tiene los fondos disponibles el valor final indica que -\$5031.71 son valores sobrantes de los créditos. Explico los costos de la producción de las unidades optimas obtenidas (\$7272.72 + \$3636.40)\$10909.10 el crédito \$15941 saldo sobrante \$5031.7.

El precio sombra indica el precio dual del recurso, es decir; en cuanto puede mejorar la función objetivo si no se registre la desigualdad o se empeora si se registre. En este caso de los fondos disponibles es 0; en cuanto a cuanto puede aumentarse este recurso en forma ilimitada y disminuirse hasta 35031.7 con los que la empresa puede contar como mínimo.

Los fondos del crédito de acuerdo a la disponibilidad del banco para financiar estas necesidades de \$20000 la empresa necesita solamente un crédito de \$15941 dejando de utilizar \$4059 aunque la empresa tiene capacidad para aumentar el préstamo en forma ilimitada.

Los fondos propios la empresa tenía \$30000 disponible para la operación y se tiene un precio sombra de -0.023 indicando que si es necesario colocar estos dineros en el mercado se puede

cobrar 2.3% interés. De acuerdo a la producción planeada optima el aumento de capital sería de \$8727.27 y el nivel mínimo de capital sin alterar la solución es de \$34272.73.

En cuanto al tiempo en los departamentos A se tiene. De 500 horas disponibles se consumieron las 500 horas. De ser necesario horas adicionales se aumentar hasta 20 horas y disminuir hasta 200 a un costo de \$6.21.

En el departamento B se dispone de 400 horas y se consumieron las 400 horas. Si es necesario aumentar horas adicionales sería de 266.67 o reducir en 100 horas a un valor de \$2.664.

Departamento C se dispone de 200 horas y sobraron 9.09 horas. Si es necesario se puede hacer ilimitadamente o reducir en 9.09 el valor de precio sombra es cero.

Conclusiones

La empresa en la toma decisiones sobre la conveniencia de usar el crédito o no, debe optar por desistir de esté; según la cantidad a producir del producto 1 y 2 son bajos y su costo llegaría a \$10.909.09, que con el dinero disponible de \$30000 cubriría esos costos y se economiza los gastos financieros (5%) del crédito.

Al usar una prueba de acido de 3:1 esta asumiendo un amplio respaldo para compromisos de corto plazo, situación que la acredita para obtener el crédito.

La empresa al considerar en la toma decisiones el crédito solamente se recomienda hacerlo por la suma de \$15941 de los \$20000 que el banco estaría dispuesto a prestar.

Se recomienda ampliar las horas disponibles de los departamentos para la producción si se desea aumentar la producción según demanda de los productos en el mercado.