Modelo de Teoría de Juegos mediante Optimización Lineal del Gran M

El buen uso de las herramientas de optimización para la toma de decisiones.

Rodrigo Perez Peña *ingpepe@hotmail.com* *Celular. 3152249841*

Modelo de Teoría de Juegos mediante Optimización Lineal del Gran M

Game Theory Model by Linear Optimization of Big M

Rodrigo Pérez Peña
Docente investigador Universidad Piloto de Colombia
Ciudad, país
ingpepe@hotmail.com

Resumen.

La presente investigación se fundamenta en resaltar para la toma de decisiones el modelo de teoría de juego relacionado a estrategias mixtas; la aplicabilidad del algoritmo del método simplex a través de la tabla de simplex iterativa, mediante la modalidad del Gran M, en el caso del jugador I.

Obtener una estimación óptima de las probabilidades que optimizan la función objetivo del modelo para ganar la confrontación, utilizando ciertas estrategias definidas por los adversarios.

Demostrar que mediante este algoritmo se pueden obtener varios resultados óptimos que enriquecen más el análisis de toma decisiones en los diferentes problemas que se presentan en las empresas y el mundo de los negocios. Además de lograr obtener en esta misma la solución para el jugador II mediante el dual.

Abstract.

The present research is based on highlighting the game theory model related to mixed strategies for decision making; the applicability of the algorithm of the simplex method through the iterative simplex table, by the Big M modality, in the case of player I.

Obtain an optimal estimation of the probabilities that optimize the objective function of the model to win the confrontation, using certain strategies defined by the adversaries.

Demonstrate that through this algorithm several optimal results can be obtained that further enhance the decision-making analysis in the different problems that arise in companies and the business world. In addition to being able to obtain in the same solution for the player II through the dual.

J.E.L. CO2, C61, C73, C78

Introducción

En la teoría de la investigación de operaciones se contempla la programación lineal que contiene una serie de método aplicativos a la solución de los diferentes problemas que se presentan en el mundo de los negocios y de las organizaciones. para la toma de decisiones en la búsqueda de maximizar los rendimientos y minimizar los costos en el buen uso de los recursos de capital.

La presente investigación busca resaltar como se puede utilizar los modelos de programación lineal en la solución de los problemas de la teoría de juegos para la toma de decisiones. El modelo que se considerara de la PL [1] es el método simplex y dentro de las variedades de los métodos del simplex, la del Gran M y dual.

Cabe resaltar que para la solución de los problemas de teoría de juegos existen una gran variedad de modelos de solución según problema, sin embargo, el trabajo de investigación tratara en los tipos de problemas donde no se tiene punto de silla dentro del juego y se presentan como solución las estrategias mixtas.

Estas estrategias en la teoría de juegos se plantean como solución, la formulación de dos modelos de PL uno para cada jugador que participaran en la confrontación. La base del juego se encuentra en la matriz de pagos la cual contiene las diferentes estrategias que utilizara cada jugador para la competencia.

El objetivo de la presente investigación es determinar la importancia de los métodos de optimización de PL en la obtención de una solución a los problemas de teorías de juegos.

La teoría de juegos fue desarrollada por Von Neumann y Morgenstern en 1944 como la toma de decisiones bajo conflicto, donde el juego consiste en la confrontación entre dos o más jugadores que buscan maximizar su propio bienestar es decir ganar. En un juego donde las ganancias de los ganadores suman exactamente igual a las perdidas de los perdedores llamado también el juego suma cero.

MATERIALES y METODOS

Los alcances de la investigación son de tipo descriptivo con enfoque cuantitativo. Teniendo en cuenta que la investigación descriptiva "*Busca especificar propiedades, características, rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice*" (Sampieri, Collado, & Lucio, 2010, pág. 92).

Otra definición. *"dos o más tomadores de decisiones, llamados jugadores, compiten como adversarios entre sí. Cada jugador selecciona una estrategia de forma independiente, sin conocer de antemano la estrategia del otro jugador o jugadores."* (Anderson, Sweeney, Williams, Camm, & Martin, 2011, pág. 166).

¿Qué es la teoría de juegos? Hiller Liberman la define "*La teoría de juegos es una teoría matemática que estudia las características generales de situaciones competitivas de manera formal y abstracta*" (Hillier & Lieberman, 2010, pág. 605).

[1] Programación lineal

Otros autores la definen "*Dos o más individuos se encuentran en una situación de competencia, si el logro de los objetivos de uno de ellos implica la reducción de las probabilidades de los demás para alcanzar los suyos*." (Juan, 1996, pág. 726) .

¿Qué es la modelación de investigación operacional?

> *Los diferentes modelos que plantea la investigación operacional son muy importantes en la toma de decisiones gerenciales, ya que contribuyen en la solución de los diferentes problemas que se presentan en las empresas u organizaciones. Una vez establecidas las mejoras a partir del modelo, los valores óptimos pueden diferir de la realidad, por factores externos, que nada tienen que ver el modelo elaborado*. (Pérez, 2019, pág. 20)

Ya que se pretende obtener un modelo de solución a los problemas de las estrategias mixtas en la teoría de juegos, diferente a las técnicas tradiciones mediante la utilización del método simplex aplicando el Gran M y el dual.

El juego es una competencia entre dos personas, negocios o empresas, donde cada uno utiliza diferentes o iguales estrategias para ganar o disminuir las perdidas.

El instrumento fundamental del juego son la matriz de pagos y las estrategias la estructura de la matriz de pagos es como se indica a continuación.

Matriz de pagos

		J = II			
		E_1	E_2	….	E_n
J = I	E_1	a_{11}	a_{12}	….	a_{1n}
	E_2	a_{21}	a_{22}	….	a_{2n}
	….	…	….	….	….
	E_n	a_{m1}	am2	…..	a_{mn}

Donde se tiene el Jugador I contiene las estrategias E_1……E_n para ganar el juego y el Jugador II contiene las mismas estrategias para contrarrestar las perdidas; los valore a_{ij} dentro de la matriz de pagos son los valores que gana o pierde cada jugador en la confrontación.

Para ganar el juego se logra mediante dos formas; uno de las estrategias puras y dos mediante las estrategias mixtas.

En un juego de estrategia pura un jugador tiene solo una y única estrategia optima para ganar el juego.

Cuando no se logra obtener una estrategia pura optima se emplea la solución de las estrategias mixtas, la diferencia entre las estrategias puras y mixtas es que en las primeras se tiene un punto de silla, en las segundas no. Ese punto de silla se obtiene a través del criterio de maximin y minimax cuando los resultados de estos son iguales, al establecer esta se obtiene suma cero indicando que se ha obtenido la estrategia óptima del juego.

Cuando no se tiene el punto de silla para encontrar una solución al juego se utiliza las estrategias mixtas, ¿Cómo obtener una solución? Para ello se debe intercambiar las estrategias es decir usar una estrategia parte del tiempo y las otras su complemento. Lo relevante de las estrategias mixtas es que estas no las conoce los contendores en la contienda y cada uno las selecciona de una manera aleatoria ¿Cómo encontrar la solución o valor del juego? Ante la incertidumbre de cuales estrategias utiliza cada jugador se analiza las proporciones optimas y con ello se encuentra el valor esperado.

En la confrontación entre dos competidores o adversarios cada uno puede presentar más de dos estrategias y dependiendo de estas se establece su matriz de pagos.

En el caso de la investigación se supone que cada jugador posee más de dos estrategias. En la búsqueda de una solución óptima se plantean dos tipos de problemas de programación lineal uno para cada jugador o negocio o empresa.

El propósito de cada modelo PL es buscar los valores probabilísticos con los cuales el jugador seleccionara la estrategia para atacar a su adversario.

En el presente trabajo se va resaltar la importancia de los modelos del simplex en especial la del Gran M.

Existe muchos software para obtención de una solución óptima de los modelos de programación lineal aplicando el algoritmo de maximización o minimización como QSBWIN, Lindo, Solver, entre otros; sin embargo la investigación esta orientada a demostrar de una manera iterativa a través de la tabla del simplex las implicaciones y conflictivos que se presentan al desarrollar este tipo de problemas mediante el algoritmo del simplex y que no se pueden analizar ni observar al aplicar un software determinado.

Procedimiento

Una vez establecida la matriz de pagos y no se encuentra el punto de silla se procede a establecer los modelos de PL para resolverlos por el método simplex.

Para ello replanteamos la matriz de pagos así.

Matriz de pagos

			J = II			
J = I			Y_1	Y_2		Y_3
			E_1	E_2	….	E_n
	X_1	E_1	a_{11}	a_{12}	….	a_{1n}
	X_2	E_2	a_{21}	a_{22}	….	a_{2n}
		….	…	….	….	….
	X_3	E_n	a_{m1}	am2	…..	a_{mn}

Como en la situación de las estrategias mixtas se recomienda a cada jugador asignar una función de distribución de probabilidad sobre el total de estrategias que contenga la matriz. Se plantea para ello dos tipos de variables X_j y Y_j que corresponden a las probabilidades del jugador I y II con las cuales se calcula el valor esperado de ganar el juego. Teniendo en cuenta que la suma de las probabilidades es igual a 1 ($x_1 + x_2 + x_3 + ...+ x_n = 1$).

Luego se establece el modelo de PL para el jugador I y II; mediante el siguiente procedimiento matemático.

Definimos las variables probabilísticas así.

X_i = La probabilidad de que el jugador I utilice la estrategia E_j.

Y_j = La probabilidad de que el jugador II utilice la estrategia E_j.

Definimos la función objetivo para el modelo J=I.

Max z = V

Donde se maximiza una variable V

Definimos las restricciones

$a11X11 + a12X12 + \ldots.+a_{1n} X_{1n} \geq V$

$a21X21 + a22X22 + \ldots + a32X32 \geq V$

… …. … + .. … ..

a_{m1} $Xm1 + a_{m2}Xm2 + \ldots. + a_{mn}$ $X_{mn} \geq V$

Definimos la condición de no negatividad

$X_{ij} \geq 0$ Para todo i = 1….m ; J = 1…..n

Definimos el modelo matemático

Max z = V

C.S.R.

$A_{11}X_{11} + A_{12}X_{12} + \ldots. + A_{1n}X_{1n} \geq V$

$A_{21}X_{21} + A_{22}X_{22} + \ldots. + A_{2n}X_{2n} \geq V$

………………………………………

$A_{m1}X_{m1} + A_{m2}X_{m2} + \ldots. + A_{mn}X_{mn} \geq V$

$X_{ij} \geq 0$ Para todo i = 1….m ; J = 1…..n

En igual forma se plantea el Modelo de PL para el jugador II.

Min z = W

C.S.R.

$a_{11}y_{11} + a_{12}y_{12} + \ldots.+ a_{1n}y_{1n} \leq w$

$a_{21}y_{21} + a_{22}y_{22} + \ldots.+ a_{2n}y_{2n} \leq w$

…………………………………

$a_{m1}y_{n1} + a_{m2}y_{m2} + \ldots.+ a_{mn}y_{mn} \leq w$

$y_{ij} \geq 0$ Para todo i =1…m y j= 1…. n

El valor esperado a optimizar corresponde al pago esperado, al aplicar el valor esperado de la teoría de probabilidad la cantidad viene expresada de la siguiente manera.

Para el jugador I = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j p_{ij}$

Donde p_{ij} es el pago si el jugador I utiliza la estrategia i y el jugador II utiliza la estrategia j. en el caso del modelo simplex es valor total de la función objetivo z.

la investigación se fundamentó en la del jugador I teniendo en cuenta que el modelo simplex corresponde al del Gran M.

Supongamos el siguiente problema de teoría de juegos.

Dos empresas comparten el grueso del mercado para cierto tipo de productos. Cada una está haciendo nuevos planes de comercialización para el próximo año con la intención de arrebatar parte de las ventas a la otra empresa. (las ventas totales son más o menos fijas, por lo que una empresa puede incrementar sus ventas, solo si disminuye las de la otra. Cada una está considerando tres posibilidades.

- Un mejor empacado del producto
- Un aumento en la publicidad
- Una pequeña reducción en el precio

Los costos de las tres operaciones son compatibles y/o suficientemente grande como para que cada empresa elija solo una. El efecto estimado de cada combinación de alternativas sobre el porcentaje aumentando las ventas para la empresa I son:

Matriz de Pagos

		Empresa II		
		Empacado	**Aumento Publicidad**	**Reducción Precio**
Empresa I	**Empacado**	2	3	4
	Aumento Publicidad	1	4	3
	Reducción Precio	3	2	5

Cada empresa debe hacer su elección antes de conocer la decisión de la otra empresa.

Se desea determinar.

- Si existe punto de silla o no.

- Si no existe punto de silla buscar una solución óptima mediante las estrategias mixtas.

En la matriz de pagos se tiene la competencia de las dos empresas por lograr tener la preferencia de los productos ante sus consumidores, para ello utilizan tres tipos de estrategias comunes para las dos, el empacado del producto, aumento de la publicidad, reducción de los precios y los valores porcentuales sobre las ganancias o pérdidas si aplica esa estrategia.

Inicialmente se comprueba si existe hay punto de silla o no, aplicando los criterios maximin y minimax.

Matriz de Pagos					Valor Mínimo	Valor Máximo	Punto de Silla
		Empresa II					
Empresa I		Empacado	Aum. Public.	Reduc. Precio			
	Empacado	2	3	4	2	2	No hay punto de silla
	Aum. Public.	1	4	3	1		
	Reduc. Precio	3	2	5	2		
	Valor Máximo	3	4	5			
	Valor Mínimo	*3*					

De la aplicación de los criterios se puede observar que no existe punto de silla. Donde estrategia de la empresa I, usada para ganar el juego es aumentando la publicidad y la empresa II es mejorar el empaque del producto. E_1 # E_2.

Aplicando el método de estrategia pura nos esta indicando que la confrontación no es posible y se debe buscar otro procedimiento para lograr buscar una competencia entre las dos empresas que tenga equilibrio de mercado entre estas.

Como solución se plantea el método de las estrategias mixtas; para ello se formula la nueva matriz de pagos.

		Matriz de Pagos			
			Empresa II		
			y1	y2	y3
	Empresa I		Empacado	Aum. Public.	Reduc. Precio
X1		Empacado	2	3	4
X2		Aum. Public.	1	4	3
X3		Reduc. Precio	3	2	5

Involucrando las variables X_i y y_j que corresponden a las variables probabilísticas que utilizará cada empresa a estimar.

La estrategia X_1, X_2, X_3, $\ldots X_n$ son óptimas sí.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}X_i y_j \geq v = V$$

Para todas las estrategias del oponente (y1, y2, . . ., yn).

Las dos dificultades que quedan por resolver son que: 1) se desconoce , y 2) el problema de programación lineal no tiene función objetivo.

En el caso del trabajo se formulará el modelo de la empresa I

X_I = La probabilidad de que la empresa I use la estrategia i.

Max Z = V

C.S.R.

$$2X_1 + 3x_2 + 4X_3 \geq v$$
$$X_1 + 4x_2 + 3X_3 \geq v$$
$$3X_1 + 2x_2 + 5X_3 \geq v$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3, \geq 0$$

Por la condición de presentar restricciones ≥ es un modelo de PL del método simplex del Gran M.

Estructuración del modelo

Como los problemas de PL a resolver por el algoritmo del método simplex, tienen la siguiente estructura en las restricciones.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{J=1}^{n} a_{ij}\, x_{ij} \leq\geq= b_i$$

Donde el b_i es el termino independiente que limita los recursos disponibles, se ajusta el modelo inicial así.

Max Z = V

C.S.R.

$$2X_1 + 3x_2 + 4X_3 - v \geq 0$$
$$X_1 + 4x_2 + 3X_3 - v \geq 0$$
$$3X_1 + 2x_2 + 5X_3 - v \geq 0$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3, \geq 0$$

Una vez ajustado el modelo se procede a buscar la solución por el método simplex del Gran M.

Los problemas de la programación lineal generalmente se encuentran expresados en términos de inecuaciones (desigualdades) en vez de ecuaciones las cuales son muy difíciles de tratar en el álgebra. El truco que usa el Método Simples es cambiar las desigualdades a igualdades, por medio de variables de holgura (relleno) y "variables de superávit".

Es conveniente tener en cuenta que una solución básica no degenerada; es aquella solución básica cuyas variables básicas son positivas (>0).

Complicaciones del Modelo

Cuando se presentan restricciones mayores igual (≥); es este caso se debe restar una variable de holgura y sumar una variable artificial. Por ejemplo.

$$3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 18$$

El ajuste a la función objetivo del Gran M en la maximización se agrega estas variables así ejemplo.

Max $z = - 3x_1 + 5x_2 - Mx_6$

En el caso de las restricciones igual a un b_i se soluciona desagregando la restricción en dos una mayor igual (≥) y otra menor igual (≤) ejemplo.

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$

Cuando hay empate en la variable que sale de la base se selecciona arbitrariamente cualquiera.

Cuando se tiene valores b_i iguales a cero y son básicas, pero ninguno es negativo, aún es posible usar las variables de holgura para formar la solución factible básica inicial. Este tipo de solución es básica degenerada.

resolver el modelo por el método simplex tiene varias implicaciones por la limitación de sus restricciones, que requiere de unas consideraciones matemáticas anteriormente descriptas para obtener la solución óptima de una forma iterativa.

El instrumento para valorar el modelo es a tabla del Simplex cuya explicación y fundamentos matemáticos explicativos se encuentra en la introducción a los modelos de optimización[2].

Modelo Tabla del Simplex inicial																
	Cj		**0,00**	**0,00**	**0,00**	**1,00**	**0,00**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**0**	**-M**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**X12**	**X13**	**b/a**
-M	X6	0,0	2,00	3,00	4,00	-1,00	-1,00	1	0	0	0	0	0	0	0	0,00
-M	X8	0,0	1,00	4,00	3,00	-1,00	0,00	0	-1	1	0	0	0	0	0	0,00
-M	X10	0,0	3,00	2,00	5,00	-1,00	0,00	0	0	0	-1	1	0	0	0	0,00
0	X11	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1,00
-M	X13	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1,00
	Z	-M	-7M	-10M	-13M	-1-3M	M	0	M	0	M	0	0	M	0	

La representación de la información del modelo de problema a solucionar, mediante la tabla del simplex es la que se detalla en la anterior tabla.

En ella se detalla una fila de los C_j corresponde a los coeficientes de contribución de la función objetivo. En la siguiente fila se tiene las variables en este caso varían desde X_1 hasta X_{13} se registra ese total porque las restricciones son del signo mayor igual y para establecer la igualdad se resta una variable de holgura y se suma una variable artificial; como la función objetivo es maximizar la M va negativa si fuera minimizando la M seria positiva; el valor de la M en el método del Gran M es un valor muy grande. El valor de 1 corresponde a la variable desconocida V en la función objetivo. La suma de las probabilidades es igual 1 esta restricción se descompone en dos restricciones una $\leq$ y otra $\geq$ por estas consideraciones se obtiene esa cantidad de variables. Las tres primeras columnas corresponden a las variables básicas en la base, inicialmente se tiene que todas son las variables de holgura y artificial la suma producto de C_B*b_i constituye el valor de Z de la función a optimizar.

Para realizar cada iteración se selecciona que variable entra a la base, para ello se calcula todos los $(Z_J - C_J)$ correspondientes a la ultima fila de los cuales como estamos maximizando la función objetivo se seleccionamos la más negativa que en la tabla inicial es X_3; una vez indicado que variable entra a la base, seleccionamos cual sale, para ello se toma la columna de la que entra y dividimos los b_i por los coeficientes técnicos o sea a_{ij} de la tabla del simplex (b/a), y se selecciona la menor positiva. El cruce de la variable que entra y la que sale forma el elemento pivote cuya función es la dividir cada uno de los cálculos de las nuevas posiciones de la

2 https://aprendizajepepe.wordpress.com/2022/04/01/modelo-optimizacion/

nueva tabla del simplex, ese recorrido se le llama iteración; que es cuando un vértice del polígono de soluciones se traslada a otro vértice hasta obtener el óptimo.

Este modelo que se genera de las estrategias mixtas para el jugador I constituye un caso de solución degenerada, porque se tienen valores de cero en la base de la tabla inicial de iteraciones como Básica; esto implica múltiples soluciones al problema, ¿Por qué? Tener cero en la base como básica, se tiene empate para seleccionar la variable que sale de la base (b/a) y esto puede generar una variable cero en la próxima iteración. En el caso del modelo que se está analizando se tiene empate en la variable que sale de la base; se selecciona arbitrariamente una de ellas como vértice inicial para encontrar la solución óptima.

Las implicaciones del empate en la variable que sale es que no s lleva a una solución factible básica degenerada ya que las variables candidatas a entrar para dejar la base deberá tomar el valor de cero.

Los b_i en la tabla del simplex Básica no puede ser negativos.

Al observar la tabla del simplex inicial se observa que tienen tres variables básicas en cero y por consiguiente hay tres (b/a) en cero; luego hay empate para seleccionar que variable sale de la base. En este caso se tiene que se puede seleccionar arbitrariamente cuales cualquiera de las tres variables. ¿Cuál es el problema? Inicialmente como es un problema del Gran M se tienen cuatro valores de M en la base como coeficiente de contribución y para lograr la solución óptima es necesario que todas las M salgan de la base básica. Como las variables X_1, X_2, X_3 corresponden a las probabilidades en la matriz de pagos de la empresa I, y son las que deseamos conocer, su límite en la restricción mayor igual a cero, ahora se tiene una variable desconocida que se va optimizar llamada V que es el valor total del valor esperado de las estrategias utilizadas por la empresa I para ganar segmentación de mercado con sus productos.

¿Por qué se establece este tipo de modelos PL?

Una de las condiciones por buscar otra forma de obtener una solución a la confrontación de mercado entre las dos empresas es; al no encontrar el equilibrio de la confrontación mediante la modalidad del maximin y minimax en el punto de silla, se debe plantear la solución mediante el valor esperado (VE), mediante el establecimiento de un modelo de PL para cada Jugador en este caso empresa y resolviéndolos por el método simplex.

¿Qué implicaciones tiene obtener en el modelo de PL estas M?

Que las M es un artificio matemático para poder destruir las desigualdades $\geq$ en las restricciones, las cuales se les agrega dos variables se resta una de holgura y se resta otra artificial cuyos coeficientes de contribución en la función objetivo son cero y M; que al realizar la estimación de las iteraciones se debe buscar que salgan de la base, para lograr una optimización exitosa.

¿Qué implica, contar con varias variables básicas en la base, en cero en la tabla inicial del simplex?

Una de las implicaciones que se obtiene más de una solución óptima para jugador I por medio de este procedimiento; esto favorece al jugador o empresa porque puede contar con más de una solución con sus estrategias para enfrentar a su contrincante.

Se puede comenzar el procedimiento iterativo de buscar la solución óptima al tener empate por cualquier variable, en nuestro caso comenzare por la segunda variable.

Primera Solución estratégico Empresa I

Una vez se tiene la anterior tabla inicial se calcula la primera iteración que se describe a continuación.

Modelo Tabla del Simplex Primera Iteración																
	Cj		**0,00**	**0,00**	**0,00**	**1,00**	**0,00**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**0**	**-M**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**X12**	**X13**	**b/a**
-M	X6	0,00	-2,50	-5,00	0,00	0,50	-1,00	1,00	1,50	-1,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0	X3	0,00	1,50	2,00	1,00	-0,50	0,00	0,00	-0,50	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
-M	X10	0,00	-3,50	-7,00	0,00	1,50	0,00	0,00	2,50	-2,50	-1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0	X11	1,00	-0,50	-1,00	0,00	0,50	0,00	0,00	0,50	-0,50	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	-2,00
-M	X13	1,00	-0,50	-1,00	0,00	0,50	0,00	0,00	0,50	-0,50	0,00	0,00	0,00	-1,00	1,00	-2,00
	Z	-M	-6,5M	13M	0	-1-2,5M	M	0	M	0	M	0	0	M	0	

En esta primera solución se ha tomado como variable para salir de la base la segunda en la tabla del simplex X_8 cuyo coeficiente en la función objetivo es -M y entra a la base X_3 se realiza todo el proceso de cálculo de la primera iteración, una vez estimada se procede a identificar que variable entra a la base en este caso es X_1 y sale X_3 para la segunda iteración; en este caso sale la misma que entro en la primera X_3 esa situación se puede presentar teniendo en cuenta que posee valores cero en la base básica.

La segunda solución óptima encontrada se parte de la tabla inicial del simplex seleccionado la primera fila de la variable básica en la base X_6 y entrando en la base X_3, como puede apreciarse en la tabla inicial por ser la variable más negativa de los (z_j – C_j) y tenerse empate en la variable que sale, que de acuerdo a lo enunciado anteriormente se puede seleccionar cualquiera arbitrariamente.

Modelo Tabla del Simplex inicial																
	Cj		**0,00**	**0,00**	**0,00**	**1,00**	**0,00**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**0**	**-M**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**X12**	**X13**	**b/a**
-M	X6	0,0	2,00	1,00	3,00	-1,00	-1,00	1	0	0	0	0	0	0	0	0,00

-M	X8	0,0	3,00	4,00	2,00	-1,00	0,00	0	-1	1	0	0	0	0	0	0,00
-M	X10	0,0	4,00	3,00	5,00	-1,00	0,00	0	0	0	-1	1	0	0	0	0,00
0	X11	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1,00
-M	X13	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1,00
	Z	-M	-10M	-9M	-11M	-1+3M	M	0	M	0	M	0	0	M	0	

En esta nueva solución que se plantea se parte desde la primera fila de la tabla inicial del simplex, De las básicas en la base de las que contiene la M y se continua el proceso iterativo hasta retirar de la base básicas todas las M y obtener la tabla final óptima por este procedimiento iterativo.

La tercera solución que se busca es partiendo de la tercera fila de las variables básicas en la base, entrando a la base X_{10} otra de las que contiene M y saliendo de la base X_3, la tabla inicial del simplex es la siguiente.

Modelo Tabla del Simplex inicial																
	Cj		**0,00**	**0,00**	**0,00**	**1,00**	**0,00**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**0**	**-M**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**X12**	**X13**	**b/a**
-M	X6	0,0	2,00	1,00	3,00	-1,00	-1,00	1	0	0	0	0	0	0	0	0,00
-M	X8	0,0	3,00	4,00	2,00	-1,00	0,00	0	-1	1	0	0	0	0	0	0,00
-M	X10	0,0	4,00	3,00	5,00	-1,00	0,00	0	0	0	-1	1	0	0	0	0,00
0	X11	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1,00
-M	X13	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1,00
	Z	-M	-10M	-9M	-11M	-1+3M	M	0	M	0	M	0	0	M	0	

son las tres formas de inicializar el cálculo de la solución óptima del problema y encontrar el valor de las probabilidades estratégicas que cada jugador puede utilizar para la confrontación.

Resultados

Después de realizada seis iteraciones se logra obtener la solución optima del problema como se aprecia en la tabla final iterativa.

El resultado obtenido es una solución básica factible optima degenerada, por la limitación de la restricción igual, además por poseer como limite el valor de cero, indicando con ello que se puede obtener multiplex soluciones en ese vértice del polígono de soluciones factible que forma el modelo matemático del simplex.

Modelo Tabla del Simplex Sexta Iteración																
	Cj		**0,00**	**0,00**	**0,00**	**1,00**	**0,00**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**0**	**-M**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**X12**	**X13**	**b/a**
0	X9	2,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	-1,00	2,00	0,00	0,00	

0	X1	0,50	1,00	2,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	-0,50	0,50	0,00	0,00	0,50	0,00	0,00	
0	X3	0,50	0,00	-1,00	1,00	0,00	1,00	-1,00	0,50	-0,50	0,00	0,00	0,50	0,00	0,00	
0	X12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00	-1,00	
1	X4	2,50	0,00	0,00	0,00	1,00	0,50	-0,50	0,50	-0,50	0,00	0,00	2,50	0,00	0,00	
	Z	2,50	0	0	0	0	0,5	M-0,5	0,50	M-0,50	0,00	M	2,50	0	M	
							y_1		y_2		y_3		y_4	y_5		

La solución óptima es la siguiente.

La solución óptima de la Empresa I es:

$X_1^* = 50\%$; $X_2^* = 0$; $X_3^* = 50\%$ $X_4^* = 250\%$; $X_9^* = 200\%$; $X_{12}^* = 0\%$ las demás variables que no están en la base tienen valor de cero.

De esta misma tabla final se obtiene la solución optima de la empresa II, teniendo en cuenta que en la solución final del método simplex se puede obtener la solución del dual el cual corresponde a la del adversario. ¿Cómo se identifica la solución en la tabla final óptima?

A través de las variables de holgura en los $Z_J - C_J$, de la tabla final optima del simplex.

Donde $y_1^* = 50\%$, $y_2^* = 50\%$ $y_3^* = 0$, $y_4^* = 250\%$, $y_5^* = 0$

Como se llegó a esta solución cuando todos las M salen de la base de las básicas y todos los $Z_J - C_J$ son positivos.

En la segunda solución planteada después en la sexta iteración se encuentra la solución óptima.

Modelo Tabla del Simplex Sexta Iteración																
	Cj		**0,00**	**0,00**	**0,00**	**1,00**	**0,00**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**0**	**-M**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**X12**	**X13**	**b/a**
0	X3	0,750	0,500	0,000	1,00	0,000	-0,250	0,250	0,250	-0,250	0,000	0,000	0,750	0,000	0,000	
0	X2	0,250	0,500	1,000	0,000	0,000	0,250	-0,250	-0,250	0,250	0,000	0,000	0,250	0,000	0,000	
1	X4	2,500	0,000	0,000	0,000	1,000	0,500	-0,500	0,500	-0,500	0,000	0,000	2,500	0,000	0,000	
0	X12	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	1,000	-1,000	
0	X9	2,00	0,000	0,000	0,000	0,000	-2,000	2,000	0,000	0,000	2,000	-2,000	0,000	0,000	0,000	
	Z	2,50	0	0	0	0	0,5	M-0,50	0,5	M-0,5	0	M	2.50	0	M	
							y_1		y_2		y_3		y_4	y_5		

La solución básica factible óptima degenerada es la siguiente.

Para la empresa I

$X_2^* = 25\%$, $X_3^* = 75\%$, $X_4^* = 250\%$, $X_9^* = 200\%$, $X_{12}^* = 0\%$

Para la empresa II

$y_1^* = 50\%$, $y_2^* = 50\%$, $y_3^* = 0\%$, $y_4^* = 250\%$, $y_5^* = 0\%$

donde el máximo valor óptimo de la función objetivo es 250% para ambas empresas.

La tercera solución que ofrece el método del simplex a través de la modalidad del Gran M es la siguiente, después de cinco iteraciones.

Modelo Tabla del Simplex Quinto Iteración																
	Cj		**0,00**	**0,00**	**0,00**	**1,00**	**0,00**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**0**	**-M**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**X12**	**X13**	**b/a**
0	X9	2,000	0,000	0,000	0,00	0,000	-1,000	1,000	0,000	0,000	1,000	-1,000	2,000	0,000	0,000	
0	X2	0,250	0,500	1,000	0,000	0,000	0,250	-0,250	0,250	0,250	0,000	0,000	0,250	0,000	0,000	
0	X3	0,750	0,500	0,000	0,000	0,000	-0,250	0,250	0,250	-0,250	0,000	0,000	0,750	0,000	0,000	
0	X12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	1,000	-1,000	
1	X4	2,500	0,000	0,000	0,000	1,000	0,500	-0,500	0,500	-0,500	0,000	0,000	2,500	0,000	0,000	
	Z	2,50	0	0	0	0	0,5	M-0,50	0,5	M-0,5	0	M	2,5	0	M	
							y_1		y_2		y_3		y_4	y_5		

En esta tercera solución se tiene que la solución básica factible optima degenerada es la siguiente.

Solución óptima Empresa I

$X_1^* = 0$, $X_2^* = 25\%$; $X_3^* = 75\%$, $X_4^* = 250\%$, $X_5^* = 0\%$, $X_9^* = 200\%$, $X_{12}^* = 0\%$

Solución óptima Empresa II mediante dual

$y_1^* = 50\%$, $y_2^* = 50\%$, $y_3^* = 0\%$, $y_4^* = 250\%$, $y_5^* = 0\%$.

El óptimo de la función objetivo es.

$Z^* = 250\%$ para ambas empresas.

Valor Esperado del juego

El propósito es encontrar el valor de la confrontación para cada empresa, teniendo en cuenta que la Empresa I gana y la Empresa II contrarresta las pérdidas de esa ganancia manteniendo el equilibrio del mercado. Al no tener un punto de silla, la solución de la confrontación es a través de las estrategias mixtas; para ello se establece dos modelos de PL, uno maximizando la función objetivo V para el que gana Empresa I y otro minimizando W, para el que pierde la empresa II, tomándose el modelo PL del que gana y para el cual se formuló tres modelos de obtener las probabilidades de ganar empresa I, aplicando las estrategias que poseen en la confrontación de empacado, aumento de publicidad, aumento de precio. El valor esperado de la empresa I su expresión matemática es.

$$\boldsymbol{PE(Empresa\ I) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}X_i y_j}$$

Donde p_{ij} es el valor del pago de la empresa I, si utiliza la estrategia "i" y la empresa II la estrategia "j"; la estrategia X_1, X_2, X_3 de la empresa I es óptima sí;

$$\boldsymbol{\sum^{m}\sum^{n} p_{ij}X_i y_j \geq v = V}$$

Donde V es el valor total de la confrontación, que es desconocida.

La estimación del valor esperado VE para cada una de las soluciones obtenidas es. La primera solución obtenida mediante el modelo del simplex del Gran M es la siguiente.

	VEP			**Empresa II**		
				y1	**y2**	**y3**
				50%	**50%**	**0%**
				250%	**250%**	**250%**
	Empresa I			**E**	**AP**	**R P**
X1		50%	**E**	2	3	4
X2		0%	**AP**	1	4	3
X3		50%	**R P**	3	2	5
	VEP			**250%**	**250%**	**450%**

E: Empacado; AP: Aumento Publicidad; RP: Reducción Precio.

Al analizar los resultados de los valores probabilísticos de la empresa I, se puede contemplar que con una probabilidad del 50% aplicando la estrategia de empacado puede ganar un valor de un aumento del 2% en las ventas y la empresa II con la misma probabilidad del 50% puede contrarrestar las perdidas con una estrategia empacado un valor de un aumento del 2% en las ventas; la estrategia del aumento de la publicidad tiene una probabilidad de 0% para la empresa I lo que le implica no ganar un aumento del 1% con esta estrategia sin embargo la empresa II puede contrarrestar sus pérdidas aumentando las ventas en un 1% con una probabilidad del 50% con la estrategia del empacado; con la estrategia de reduciendo el precio la empresa I gana un 3% del aumento de las ventas y la empresa II con la estrategia de empacado disminuye las perdidas con un aumento del 3% de las ventas.

El total de la confrontación es de 250% con respecto a lo que gana la empresa I como valor esperado VE con respecto a la estrategia del empacado de la empresa II; en igual forma lo que gana sucede con la estrategia dos, aumento de publicidad de la empresa II con respecto al VE de la empresa I; el caso de la estrategia aumento de precio de la empresa II respecto a lo que gana la empresa I es de 450% ¿Por qué? Si se observa la confrontación la empresa I tiene probabilidades de ganar del 50% con el empacado y reduciendo el precio, mientras que la empresa II no tiene probabilidad de disminuir las perdidas ya que la probabilidad de utilizar el aumento de precio es 0% no tiene ninguna posibilidad.

En la segunda solución óptima de la confrontación la empresa I tiene posibilidades de ganar con la estrategia Aumento de publicidad y reduciendo el precio con una probabilidad del 25% y 75%.

	VEP			Empresa II		
				y1	y2	y3
				50%	50%	0%
				250%	250%	250%
	Empresa I			E	AP	R P
X1		0%	E	2	3	4
X2		25%	AP	1	4	3
X3		75%	RP	3	2	5
	VEP			250%	250%	450%

E: Empacado; AP: Aumento Publicidad; RP: Reducción Precio.

Mientras que la empresa II utiliza las estrategias el empaque y el aumento de la publicidad para disminuir las perdidas obtenidas por la ganancia de su contendor, las probabilidades son del 50% y 50% la tercera estrategia no le es conveniente utilizarla en la confrontación, la probabilidad es 0% el valor esperado total, es de 250% igual que en la primera solución obtenida.

La tercera solución obtenida de la empresa I para ganar es la siguiente.

	VEP			Empresa II		
				y1	y2	y3
				50%	50%	0%
				250%	250%	250%
	Empresa I			E	AP	R P
X1		0%	E	2	3	4
X2		25%	AP	1	4	3
X3		75%	R P	3	2	5
	VEP			250%	250%	450%

E: Empacado; AP: Aumento Publicidad; RP: Reducción Precio.

Esta respuesta es idéntica a la segunda solución básica factible óptima degenerada, lo cual implica que su análisis a realizar es similar por identificar las mismas probabilidades de cada empresa en la confrontación.

Análisis del valor esperado

El anterior análisis de los resultados obtenidos de las diferentes soluciones que brinda el algoritmo del modelo simplex en su modalidad del Gran M, se considero de una manera global del resultado según el valor esperado y su impacto aplicado a cada una de las estrategias consideradas en la confrontación.

Ahora se analizará el impacto de una manera desglobalizada del valor total 250% con el fin determinar el aporte que recibe el ganador con cada de las estrategias.

	E	AP	RP	
E	50,0%	75,0%	0,0%	**125%**
AP	0,0%	0,0%	0,0%	**0%**
RP	75,0%	50,0%	0,0%	**125%**
	125,0%	**125,0%**	**0,0%**	250%

En el caso de la primera solución de la confrontación se tiene que la empresa I de la ganancia total 250%; el 125% de esa ganancia la consigue utilizando la estrategia empacado en un 50% y la estrategia Reduciendo el precio 75% mientras que la empresa II contrarresta las perdidas con la estrategia empacado. El otro 125% logrado lo obtiene el valor esperado, utilizando la estrategia empacado con un 75% y el 50% reduciendo el precio, mientras que la empresa II contrarresta las perdidas con la estrategia aumentando publicidad. Esta misma estrategia la empresa I la aplica a la tercera estrategia de la II sin embargo esta tiene una probabilidad del 0% en la confrontación, como esta no entra en la competición, en caso de ser utilizada la empresa I tendría un valor esperado de 450% para futuras confrontaciones.

En la segunda solución optima se tiene

	E	AP	RP
E	0,0%	0,0%	0,0%
AP	12,5%	50,0%	62,5%
RP	112,5%	75,0%	187,5%
	125,0%	125,0%	250,0%

Que la empresa I para ganar segmentos de venta tiene un valor esperado total de 250% semejante a la primera solución, sin embargo, las probabilidades obtenidas en la solución son de 25% si utiliza la estrategia de aumento de la publicidad y del 75% con reducción del precio de ganar la confrontación, la estrategia de empacado tiene una probabilidad de 0% para lograr aumentar sus ventas con esta.

Los aportes de las estrategias de la empresa I para ganar a las estrategias de la empresa II, con la estrategia empacado 0%, con la estrategia empacado, aumento de publicidad un 12.5% y 112,5% con reducción de precio, para un total de 125% con la estrategia de aumento de publicidad; 0% con empacado, 50% con aumento de publicidad y 75% con reducción de precio para un total de 125% la suma de las dos se tiene un valor esperado total de 250%.

La tercera solución óptima obtenida tiene el mismo comportamiento del anterior. ¿Cuál es la diferencia de las dos soluciones? No hay diferencia es otra alternativa de lograr obtener una solución óptima, al seleccionar desde la tabla inicial de iteraciones por contar con triple empate para escoger que variable sale de la base y que para demostrar que si se toma cualquier variable de esas se obtiene una solución factible óptima degenerada.

¿Cuál es el impacto en las ventas para la empresa I el utilizar estas estrategias? El incremento de las ventas es mas significativo con la utilización la de reducir el precio que del empacado del producto, en ambas soluciones; en la toma decisiones de los directores de la empresa I esta, si es conveniente hacer y cual es el efecto financiero en hacerlo.

Modelo de solución mediante Solver

El software complementario Solver del Excel su algoritmo brinda solo una solución al problema mediante modelo simplex de PL, planteare una solución óptima con el siguiente modelo, aplicando Solver.

Modelo de Teoría de juegos

			E	AP	RP			
EMPRESA II			y1	y2	y3			
			50,0%	50,00%	0,00%	100,0%		
		V.E	2,50	2,50	2,50			
			0%	0%	0%			
EMPRESA I	Prob.		Matriz de pagos			Valor Mínimo	Valor Máximo	Punto de Silla
E	50,00%	X1	2	3	4	2,0	2	No hay punto de silla
AP	0,00%	X2	1	4	3	1,0		
RP	50,00%	X3	3	2	5	2,0		
	100%		1,0	1,0	1,0			
	Valor Máximo		3,0	4,0	5,0			
	Valor Mínimo		3					
	V.E.		2,5	2,5	4,5			
			0,0	0,0	-2,0			
						Max.	250,00%	

RPP

El diseño elaborado para la aplicación de la teoría de juegos mediante Solver contiene los dos tipos de soluciones estrategias puras a través del máximin y el mínimax como el de estrategias mixtas.

En el caso de la presente investigación se presenta el modelo de solución de las estrategias puras donde se observa que no hay punto de silla y se aplica las estrategias mixtas.

Estructura del modelo

El modelo de esta estructurado de dos partes una donde tenemos la matriz de pagos y las exigencias matemáticas para determinar las estrategias puras.
La segunda compuesta por la identificación de las variables Xi de las probabilidades y las estrategias de la confrontación, como de su valor esperado y de la empresa I y la identificación de las variables probabilísticas y las estrategias como el valor esperado de la empresa II. El modelo se corrió en el Solver de Excel, cumpliendo las exigencias del modelo de PL para cada empresa; donde la función objetivo es optimizar para la empresa I maximizando y para la empresa II minimizando; las variables cambiantes son las probabilidades a estimar para cada uno X_i y y_j cumpliendo la condición fundamental que la suma de las probabilidades es igual a 1; la suma del valor esperado es menor igual a V para el modelo del Gran M.
Corrido el modelo se obtuvo la siguiente solución para el modelo simplex de la empresa I.
El resultado de las probabilidades óptimas es:
$X_1^* = 50\%$ $X_3^* = 50\%$ $X_2^* = 0\%$ para la empresa II es $y_1^* = 50\%$, $y_2^* = 50\%$, $y_3^* = 0\%$ el Valor esperado es de 250% para ambos competidores y el global de la confrontación que igual; esta solución idéntica a la obtenida en la tabla del simplex mediante el método del Gran M.
Con el no podemos obtener si no una sola solución óptima para que la dirección de la empresa pueda tomar una decisión sobre como aplicar las estrategias definidas para la confrontación.

Conclusiones

El algoritmo del modelo simplex Gran M de una forma iterativa permite obtener varias soluciones básicas factibles óptimas degeneradas, que permiten enriquecer la toma decisiones ante un problema dado en las empresas.
Que, al aplicar la teoría de juegos para la solución de un problema sobre estrategias mixtas, en la confrontación de dos adversarios donde el uno gana y el otro contrarresta sus perdidas es muy importante la aplicación del algoritmo del simplex de una manera iterativa.
Que con los resultados obtenidos de la optimización del problema del Gran M facilita la estimación de las probabilidades de una manera diversificada y mediante varias soluciones donde el jugador I puede observar el impacto de las estrategias para obtener el valor esperado a ganar y este puede decidir se es conveniente aplicarlas y replantear esa estrategia.
Que el proceso iterativo practicado en la tabla del simplex es sencillo y no de difícil calculo, que permite analizar, en cada recorrido por el vértice de soluciones factible las incidencias de la función a optimizar.
Que el complemento de Excel Solver no brinda si no una solución óptima para analizar un problema limitando la toma decisiones para los interesados.

Bibliografía y Referencias

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camm, J. D., & Martin, K. (2011). *MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LOS NEGOCIOS.* México

D.F.: S.A. de C.V., una compañía de Cengage Lear ning, Inc.; 11 edición .

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones .* Mexico D.F.: McGraw Hill, novena edición .

Juan, P. (1996). *Métodos y modelos de investigación de operaciones VOL. 2 Modelos estocasticos .* México D.F.: Limusa S.A. .

Pérez, P. R. (2019). *Introducción a los modelos de optimización.* Bogotá D.C.: Universidad Piloto de Colombia.

Sampieri, R. H., Collado, C. F., & Lucio, P. B. (2010). *Metodología de la Investigación .* Mexico D.F.: McGraw Hill Sexta edicción .