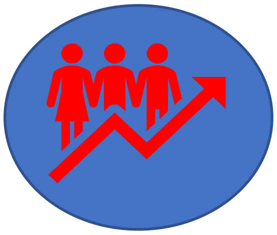
Modelos de Optimización



La optimización y su importancia en los procesos productivos.

Rodrigo Pérez Peña **Emil: ingpepe@hotmail.com** **Teléfono: 3152249841**

Modelos de Optimización

Los modelos aquí desarrollados, son mediante las técnicas de investigación de operaciones a los procesos productivos y que contribuyen a la optimización de los recursos escasos, en la producción de nuevas unidades de productos para el consumo del mercado doméstico.
Uno de los temas que contempla la investigación de operaciones es la programación lineal y dentro de estos se tiene, el modelo simplex. Que consiste en la localización de un área factible que permite obtener un vértice optimo dentro del polígono de soluciones factible.
La aplicación de este modelo simplex es utilizado en las empresas, administraciones en general tanto en la planificación, procesos productivos como en las finanzas.

Caso De Producción

La firma Hartman Company está tratando de determinar qué tanto de cada uno de dos productos puede fabricar para el siguiente periodo de planeación. En seguida se muestra la información referente a disponibilidad de mano de obra, utilización de la misma y redituabilidad de los productos.

Concepto	Producto 1	Producto 2	Mano Obra Directa (horas)
utilidad por unidad	$30	$15	
Horas por unid. Depto. A	1.0	.35	100
Horas por unid. Depto. B	.3	.20	36
Horas por unid. Depto. C	.20	.50	50

1. Elabore un modelo de programación lineal para el problema de Hartman Co. Resuelva el modelo para determinar las cantidades óptimas de producción de los artículos 1 y 2.
2. Al calcular la utilidad por unidad, la Hartman no reduce los costos de la mano de obra porque se consideran fijos para el siguiente periodo de planeación. Sin embargo, supóngase que pueden programarse tiempo extra en algunos de los departamentos. ¿En cuales se recomendaría programar tiempo extra? ¿Cuánto se estaría dispuesto a pagar por hora de tiempo extra en cada departamento?
3. Supóngase que pueden programarse 10, 6 y 8 horas de tiempo extra en los departamentos A, B y C, respectivamente. El costo del tiempo extra por hora es de $18 (dólares) en el departamento A; $22.50 en el departamento B, y $12 en el departamento C. Formule un modelo de programación lineal que pueda aplicarse para determinar las cantidades óptimas de producción si se tiene disponible el tiempo extra. ¿Cuáles son las cantidades óptimas de producción y cuales las nuevas utilidades? ¿Cuánto tiempo se recomendaría emplear en cada departamento? ¿Cuál es el aumento en las utilidades si se utiliza el tiempo extra?

Solución

Elabore un modelo de programación lineal para el problema de Hartman Co. Resuelva el modelo para determinar las cantidades óptimas de producción de los artículos 1 y 2.

Formulación del problema

Definición de variables de decisión.

X_1 = Cantidad de unidades a producir del producto 1 (u)
X_2 = Cantidad de unidades a producir del producto 2 (u)
Definición de la función objetivo (F.O)
Max U = \$/u30X_1(u) + \$/u15X_2(u)
Definición de las restricciones
Departamento A 1.0(h/u)X_1(u) + 0.35(h/u)X_2(u) $\leq$ 100 h
Departamento B 0.3(h/u)X_1(u) + 0.20(h/u)X_2(u) $\leq$ 36 h
Departamento C 0.2(h/u)X_1(u) + 0.50(h/u)X_2(u) $\leq$ 50 h
Definición de la condición de no negatividad
No negatividad $X_j \geq 0$ para j=1.2

Definición del modelo matemático
Max U = $30X_1 + 15X_2$
C.S.R.
$1.0X_1 + 0.35X_2 \leq 100$
$0.3X_1 + 0.20X_2 \leq 36$
$0.2X_1 + 0.50X_2 \leq 50$
$X_j \geq 0$ para j=1.2

Proceso Iterativo de Solución

Se resuelve el modelo matemático por el método iterativo de la tabla del simplex:
Proceso iterativo.

Modelo Tabla del Simplex inicial														
	Cj		**30**	**15**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**b/a**
0	XB3	100	1,00	0,35	1	0	0							100,00
0	XB4	36	0,35	0,20	0	1	0							102,86
0	XB5	50	0,20	0,50	0	0	1							250,00
	U	**0,00**	-30,0	-15,0	0,0	0,0	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0	

En la tabla inicial se selecciona la variable que entre y la que sale de la base.
La que entra X_1 y la que sale X_{B3} la nueva solución factible en la tabla del simplex es.

Modelo Tabla del Simplex 1o iteración													
	Cj		**30**	**15**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**b/a**
30	X_1	100	1	0,4	1	0	0							285,71
0	X_{B4}	1	0,00	0,08	-0,4	1	0							12,90
0	X_{B5}	30	0,00	0,43	0,4	0	1							69,77
	U	**3000,0**	0,0	-4,5	30,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	

En ese vértice del polígono de soluciones se tiene que la variable X_1 las unidades de producto 1 a producir es de 100; la utilidad que obtiene la empresa es de $3000; sin embargo, se obtiene una solución básica factible mas no optima, ya que al calcular todos los valores de los $Z_j - C_j$ de la variable X_2 es negativa y pide entrar a la base. La que sale es X_{B4} la nueva iteración 3 es la siguiente.

Modelo Tabla del Simplex 2o iteración														
	Cj		**30**	**15**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**b/a**
30	X1	77,89	1	0,0	2	-4	0							0,00
15	X2	63,16	0	1	-3	11	0							0,00
0	XB5	3	0,0	0,0	1,8	-5	1							0,00
	U	**3284,21**	0,0	0,0	15,8	47,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	

1. Como todos los valores de los $Z_j - C_j$ son positivos se ha obtenido la solución óptima.

De acuerdo a lo solicitado la producción optima de los productos 1 y 2 es $X_1^* = 77.89$; $X_2^* = 63.16$; La empresa obtiene una utilidad optima de $U^* = \$3284.21$.
Con estos valores se reemplaza en las restricciones para saber cuánto fue el consumo de los recursos disponibles, con esa producción en cada departamento.
Departamento A
$1.0X_1 + 0.35X_2 \leq 100$
$1.0(77.89) + 0.35(63.16) \leq 100$
$77.89 + 22.11 \leq 100$
$100 \leq 100$ luego no hay sobrante de tiempo se utilizó todo
Departamento B

$0.3X_1 + 0.20X_2 \leq 36$
$0.3(77.89) + 0.20(63.16) \leq 36$
$23.37 + 12.6 \leq 36$
$36 \leq 36$ en este departamento no sobraron horas
Departamento C
$0.2X_1 + 0.50X_2 \leq 50$
$0.2(77.89) + 0.5(63.16) \leq 50$
$15.58 + 31.6 \leq 50$
$47.16 \leq 50$ en este departamento sobran 2.9 horas
La utilidad por cada las unidades del producto 1 es 30*77.89 = $2336.84 y del producto 2, 15*63.16 =$947.37.
2.¿En cuales se recomendaría programar tiempo extra? En relación a la pregunta se tendría que programar horas extras en el departamento A.
Los departamentos que recomendaría planificar tiempo extra son A y B porque no le sobra tiempo y el C si le sobra tiempo.
¿Cuánto se estaría dispuesto a pagar por hora de tiempo extra en cada departamento?
Estaría dispuesto a pagar al revisar la tabla final se puede observar que al aplicar el dual se tiene que por cada hora adicional del Departamento A tendría un costo de $15.80 y por hora adicional en el departamento B tendría un costo de $47.40.

El valor que pagaría por hora extra en el departamento A seria un recargo que no altere la ganancia optima hallada. En los departamentos B y C no pagaría extras porque no es necesario.

2. Supóngase que pueden programarse 10, 6 y 8 horas de tiempo extra en los departamentos A, B y C, respectivamente. El costo del tiempo extra por hora es de $18 (dólares) en el departamento A; $22.50 en el departamento B, y $12 en el departamento C. Formule un modelo de programación lineal que pueda aplicarse para determinar las cantidades óptimas de producción si se tiene disponible el tiempo extra. ¿Cuáles son las cantidades óptimas de producción y cuales las nuevas utilidades? ¿Cuánto tiempo se recomendaría emplear en cada departamento? ¿Cuál es el aumento en las utilidades si se utiliza el tiempo extra?

Solución

Para dar solución a esta parte del problema se formula nuevamente el modelo a resolver teniendo en cuenta el tiempo extra por los departamentos.

Formulación del problema

Definición de variables de decisión.
X_1 = Cantidad de unidades a producir del producto 1 (u)
X_2 = Cantidad de unidades a producir del producto 2 (u)
X_A = Cantidad de horas extras en el departamento A (h)
X_B = Cantidad de horas extras en el departamento B (h)
X_C = Cantidad de horas extras en el departamento C (h)

Definición de la función objetivo (F.O)
Max U = $\$/u30X_1(u) + \$/u15X_2(u) - 18\$/hx_A(h) – 22.5\$/Hx_B(h) – 12\$/hX_C(h)$

Definición de las restricciones

Departamento A $1.0(h/u)X_1(u) + 0.35(h/u)X_2(u) \leq 100$ h

Departamento B $0.3(h/u)X_1(u) + 0.20(h/u)X_2(u) \leq 36$ h

Departamento C $0.2(h/u)X_1(u) + 0.50(h/u)X_2(u) \leq 50$ h

Tiempo Extra

$$X_A(h) \leq 10 \text{ h}$$
$$X_B(h) \leq 6 \text{ h}$$
$$X_C(h) \leq 8 \text{ h}$$

Definición de la condición de no negatividad

No negatividad $Xj \geq 0$ para j=1.2, A, B, C

Definición del modelo matemático

Max $U = 30X_1 + 15X_2 - 18X_A - 22.5X_B - 12X_C$

C.S.R.

$$1.0X_1 + 0.35X_2 \leq 100$$
$$0.3X_1 + 0.20X_2 \leq 36$$
$$0.2X_1 + 0.50X_2 \leq 50$$
$$X_A \leq 10$$
$$X_B \leq 6$$
$$X_C \leq 8$$

$Xj \geq 0$ para j=1.2, A, B, C

Modelo Tabla del Simplex inicial														
	Cj		**30**	**15**	**-18**	**-22.5**	**-12**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**b/a**
0	XB3	100	1,00	0,35	0	0	0	1	0	0	0	0	0	100,00
0	XB4	36	0,35	0,20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	102,86
0	XB5	50	0,20	0,50	0	0	0	0	0	1	0	0	0	250,00
0	X_A	10	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
0	X_B	6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
0	X_C	8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
	U	**0,00**	-30,0	-15,0	0,0	0,0	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0	

Una vez transportado los datos del modelo matemático del problema a la tabla del simplex se selecciona la variable que entra y la que sale y se identifica el elemento pivote se realiza la primera iteración, con los resultados de la siguiente tabla.

Modelo Tabla del Simplex Primera Iteración														
	Cj		**30**	**15**	**-18**	**-22,5**	**-12**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**b/a**
30	X1	100	1	0,35	-1,0	0	0	1	0	0	0	0	0	-100,0
0	XB7	6,0	0	0,10	0,30	-1	0	-0,3	1	0	0	0	0	20,0
0	XB8	30	0	0,43	0,20	0	-1	-0,2	0	1	0	0	0	150,0
0	X9	10	0	0,00	1,00	0	0	0	0	0	1	0	0	10,0
0	X10	6	0	0,00	0,00	1	0	0	0	0	0	1	0	#¡DIV/0!
0	X11	8	0	0,00	0,00	0	1	0	0	0	0	0	1	#¡DIV/0!
	U	**3000**	**0**	**-4,5**	**-12**	**22,5**	**12**	**30**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	

Como cada iteración de la tabla del simplex es el recorrido que hace el algoritmo de solución por cada vértice del polígono de soluciones. En este caso la primera iteración nos brinda una solución de ese polígono, que no es optima porque dentro los (Z_j - C_j) es negativa luego la solución obtenida es factible más no optima, en ese vértice la función objetivo toma el valor de $3000.

Luego realizamos nuevamente el proceso de selección de la variable que entra y sale y se realiza la segunda iteración, con los siguientes resultados.

Modelo Tabla del Simplex Segunda Iteración														
	Cj		**30**	**15**	**-18**	**-22,5**	**-12**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**b/a**
30	X1	110	1,0	0,4	0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	314,3
0	XB7	3	0,0	0,1	0	-1,0	0,0	-0,3	1,0	0,0	-0,3	0,0	0,0	31,6
0	XB8	28	0,0	0,4	0	0,0	-1,0	-0,2	0,0	1,0	-0,2	0,0	0,0	65,1
-18	X3	10,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	#¡DIV/0!
0	X10	6,0	0,0	0	0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	#¡DIV/0!
0	X11	8,0	0,0	0	0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	#¡DIV/0!
	U	**3.120,0**	**0**	**-4,5**	**0**	**22,5**	**12**	**30**	**0**	**0**	**12**	**0**	**0**	

En la segunda iteración se corre al siguiente vértice de soluciones factible donde el valor de la función objetivo vale $3120; sin embargo, no es óptima, es factible más no optima, al estimar los valores (Z_j - C_j), sigue dando valores negativos, luego hacemos la siguiente iteración.

Modelo Tabla del Simplex Tercera Iteración

	Cj		30	15	-18	-22,5	-12	0	0	0	0	0	0	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**b/a**
30	X1	98,9	1,0	0,0	0,0	3,7	0,0	2,1	-3,7	0,0	2,1	0,0	0,0	26,9
15	X2	31,6	0,0	1,0	0,0	-10,5	0,0	-3,2	10,5	0,0	-3,2	0,0	0,0	-3,0
0	XB8	14,4	0	0	0	4,5	-1,0	1	-5	1	1	0	0	3,2
-18,0	X3	10,0	0,0	0,0	1,0	0	0,0	0	0	0	1	0	0	#¡DIV/0!
0	X10	6,0	0,0	0	0	1	0,0	0	0	0	0	1	0	6,0
0	X11	8,0	0,0	0	0	0	1,0	0	0	0	0	0,0	1	#¡DIV/0!
	U	**3.262,1**	**0**	**0**	**0**	**-24,9**	**12**	**16**	**47,4**	**0**	**-2,2**	**0**	**0**	

En esa nueva tercera iteración el valor de la función objetivo en ese vértice es de $3262.1, sin embargo, no es optima es factible más no optima, como al calcular los valores (Z_j - C_j), hacemos la nueva iteración.

Modelo Tabla del Simplex Cuarta Iteración														
	Cj		**30**	**15**	**-18**	**-22,5**	**-12**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
CB	**B**	**bi**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**	**X11**	**b/a**
30	X1	87,2	1,0	0,0	0,0	0,0	0,8	1,2	0,0	-0,8	1,2	0,0	0,0	#¡DIV/0!
15	X2	65,1	0,0	1,0	0,0	0,0	-2,3	-0,5	0,0	2,3	-0,5	0,0	0,0	#¡DIV/0!
-22,5	X4	3,2	0,0	0,0	0,0	1,0	-0,2	0,0	-1,0	0,2	0,3	0,0	0	3,2
-18,0	X3	10,0	0,0	0,0	1,0	0	0,0	-0,3	0	0	1	0	0	#¡DIV/0!
0	X10	2,8	0,0	0	0	0	0,2	0,0	1	0	0	1	0	#¡DIV/0!
0	X11	8,0	0,0	0	0	0	1,0	0,0	0	0	0	0	1	#¡DIV/0!
	U	**3.341,3**	**0**	**0**	**0**	**0**	**6,51**	**33**	**22,5**	**5,5**	**4,15**	**0**	**0**	

Esta cuarta iteración es la solución optima del problema porque todos sus valores (Z_j - C_j), son positivos ósea mayores e iguales a cero. En este vértice, los valores finales son:

U* = $3341,3; X_1^* = 87.2; X_2^* = 65.1; X_3^* = 10.0; X_4^* = 3.2; X_5^* = 0; X_6^* = 0; X_7^* = 0; X_8^* = 0; X_9^* = 0; X_{10}^* = 2.8; X_{11}^* = 8.0;

Análisis de la solución optima

1. La Hartman Company en busca de la planificación de la producción de la empresa, para la toma de decisiones buscando optimizar las utilidades y los recursos disponibles. En su primer punto se tiene la siguiente solución.

Para obtener la utilidad optima de $3.341.30 la empresa debe producir 87.2 unidades del producto 1 y 65.10 del producto 2. Para lograr esa optima producción se debe hacer una planificación de horas extras en el departamento A de 10 horas en el B de 3.2 horas en C de 0 horas. Además de ser necesario se puede programar horas extras adicionales en los departamentos A de 2.8 horas y en el de 8 horas; si la empresa desea producir unidades adicionales fuera del proceso normal de producción.

2. Al calcular la utilidad por unidad, la Hartman no reduce los costos de la mano de obra porque se consideran fijos para el siguiente periodo de planeación. Sin embargo, supóngase que pueden programarse tiempo extra en algunos de los departamentos. ¿En cuales se recomendaría programar tiempo extra? ¿Cuánto se estaría dispuesto a pagar por hora de tiempo extra en cada departamento?

La programación de las horas extras en cada uno de los departamentos es:

Departamento A 10 horas

Departamento B 3.2 horas

Departamento C 0 horas

A la pregunta ¿Cuánto estaría dispuesto pagar por las horas extra es

La solución sin tiempo extra de la pregunta 1 es:

Sin tiempo extra = $3284.21

Con tiempo extra = $3341.30

Valor a pagar extra = $57.0